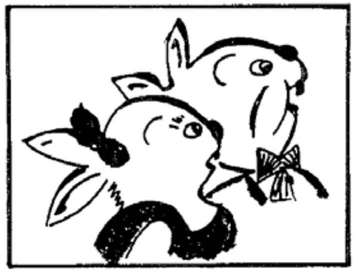
La suite de Fibonacci. (1)



Question: Quel rapport voyez-vous entre un couple de lapins et la Grande Pyramide?

Leonardo Fibonacci (dit Léonard de Pise), 1175-1240, était un riche commerçant ayant beaucoup voyagé en Moyen-Orient. Il consacrait une partie de son temps à l'étude des mathématiques. Son "Liber abaci", dans lequel il expose les connaissances des Arabes, dont il utilise les chiffres et le zéro, signale la série récurrente qui porte son nom. Elle répondait au problème suivant:

" Combien de paires de lapins peuvent être engendrées par une paire unique en un an, si chaque mois, chaque paire produit une autre paire qui devient productive à son tour à partir du 2^e mois?

Soit A, la première paire, B_1, B_2 ... sa descendance, C_1, C_2 ... la descendance de B_1, D_1, D_2 ... la descendance de B_2 ... etc.
Le cercle ◯ désigne le début de la "production", la flèche ⟶ signifie : la descendance de ...

	→ A	→ B_1	→ B_2	→ B_3	→ C_1	→ B_4	→ C_2	→ D_1	→ B_5	→ C_3	→ D_2	→ E_1	→ F_1	Nombre de paires
A														1
A														1
A	B_1													2
A	$B_1 - B_2 -$													3
A	$B_1 - B_2 - B_3 -$	$C_1 -$												5
A	$B_1 - B_2 - B_3 - B_4 -$	$C_1 - C_2$	$D_1 -$											8
A	$B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 -$	$C_1 - C_2 - C_3$	$D_1 - D_2 -$	E_1	F_1									13
A	$B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 - B_6 -$	$C_1 - C_2 - C_3 - C_4 -$	$D_1 - D_2 - D_3$	$E_1 - E_2$	$F_1 - F_2$	G_1	$H_1 -$	I_1						21
A	$B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 - B_6 - B_7$	$C_1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5$	$D_1 - D_2 - D_3 - D_4$	$E_1 - E_2 - E_3$	$F_1 - F_2 - F_3$	$G_1 - G_2$	$H_1 - H_2$	$I_1 - I_2$	J_1	K_1	L_1	M_1	N_1	34.
...														...

On obtient la suite de Fibonacci, dans laquelle chaque terme est égal à la somme des deux termes qui précèdent:

$\boxed{1 . 1 . 2 . 3 . 5 . 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 233 \ldots}$

La suite de Fibonacci. (2)

→ Si l'on calcule le rapport entre deux termes successifs, on obtient:

$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad \frac{5}{3} = 1{,}666 \quad \frac{8}{5} = 1{,}6 \quad \frac{13}{8} = 1{,}625 \quad \frac{21}{13} = 1{,}615 \quad \frac{34}{21} = 1{,}619 \quad \frac{55}{34} = 1{,}6176$

$\frac{89}{55} = 1{,}618 \quad \frac{144}{89} = 1{,}6179 \quad \frac{233}{144} = 1{,}61805$ ... plus on progresse dans la suite, plus l'on tend vers $\boxed{\varphi}$.

(chaque rapport est alternativement plus grand et plus petit que φ.)

→ On peut utiliser la formule donnée:

$$n_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \qquad n_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2} \ \ldots$$

"Les nombres de Fibonacci intègrent différents aspects des mathématiques, tels: utilité, beauté et algorithmes*, qui permettent d'inculquer le meilleur et peut être le seul motif durable de lire les mathématiques, soit le motif esthétique, en offrant un recueil d'idées mathématiques reconnues pour leur attrait, convaincantes par leur logique, émouvantes par leur beauté."

Roger V. Jean.

(* procédés de calcul)

Si l'on multiplie par 8* les termes de la série, on obtient:

$34 \times 8 = 272 \quad 55 \times 8 = \boxed{440} \quad 89 \times 8 = 712 \quad 144 \times 8 = \boxed{1152}$

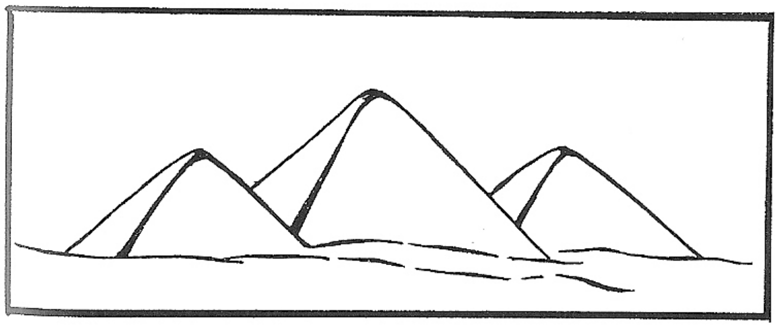
Le côté du carré de base de la Grande Pyramide mesure:

1152 empans, soit $0{,}20 \times 1152 = 230{,}40$ m

ou 440 coudées, soit $0{,}5236 \times 440 = 230{,}384$ m

(d'après P. Cantaloup)

* 8 : l'ogdoade : les quatre couples de divinités égyptiennes ayant à leur tête le Dieu Râ.



φ^2

Mesures de la Grande Pyramide: (d'après Georges Jouven.)

Bases : N = 230,253 S = 230,453 E = 230,391 O = 230,351

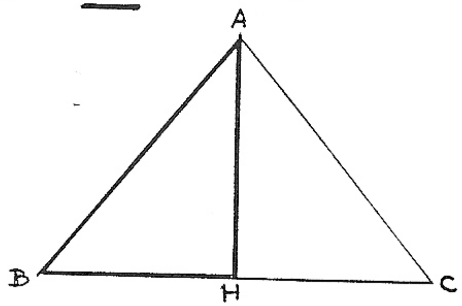
Soit, 440 coudées de 52,367 cm [$20 \times \varphi^2 = 52{,}36$.]

La hauteur mesure 280 coudées

La pente est $\frac{14}{11} = 1{,}272$

C'est un triangle φ

$AB = \varphi \quad AH = \sqrt{\varphi} \quad BH = 1.$



La section d'or et la vie.

Le monde végétal.

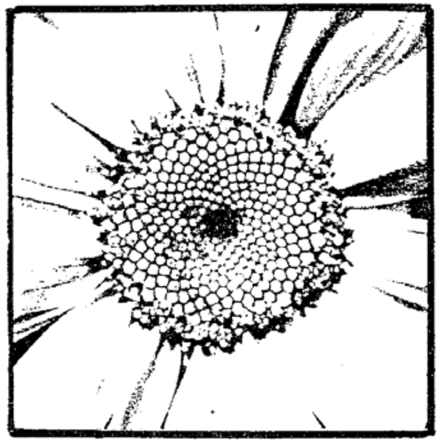
Toutes les variations sur le thème de φ que nous avons rapportées pourraient paraître fortuites. Cependant, la suite de Fibonacci , le pentagone, se retrouvent dans la nature là où il y a de la v

"Attachons un fil autour du pétiole d'une feuille près de la tige et enroulons-le autour de celle-ci en passant par le chemin le plus court. Arrêtons-nous à une feuille qui paraît à peu près superposée à la première. Dans la majorité des cas, le rapport du nombre de tours de fil au nombre de feuilles rencontrées est l'une des fractions de la suite: $\frac{1}{2}$-$\frac{1}{3}$-$\frac{2}{5}$-$\frac{3}{5}$-$\frac{5}{13}$-$\frac{8}{21}$ ... $\boxed{\frac{1}{\varphi^2}}$
(d'après Roger V. Jean)

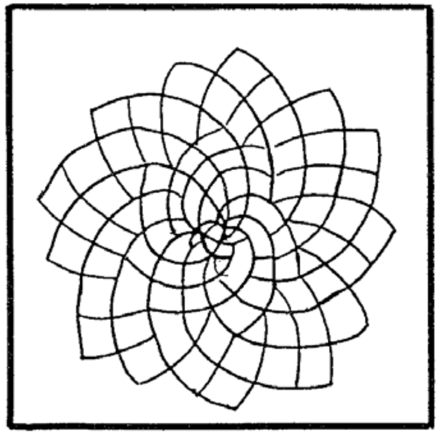
On constate la présence de la suite de Fibonacci. La "phyllotaxie" est l'étude de la disposition relative des parties semblables des plantes telles les écailles de cônes, les fleurons des capitules de composées, les feuilles, les bourgeons des arbres...

Fractions phyllotaxiques	Espèces d'arbres
$\frac{1}{2}$	orme _ tilleul.
$\frac{1}{3}$	aulne_hêtre. bouleau. noisetier
$\frac{2}{5}$	prunier_chêne_cerisier_pommier
$\frac{3}{8}$	peuplier_poirier.
$\frac{5}{13}$	saule. amandier.

Les Anciens devaient avoir remarqué l'architecture spiralée des boutons de marguerite ou de tourne sol... Il y a une centaine d'années, des naturalist ont mis en évidence que se manifestent encore ici les nombres de la suite de Fibonacci.



La marguerite
21 spirales ↻; 34 spirales ↺ 21/34
l'ananas: 1/2



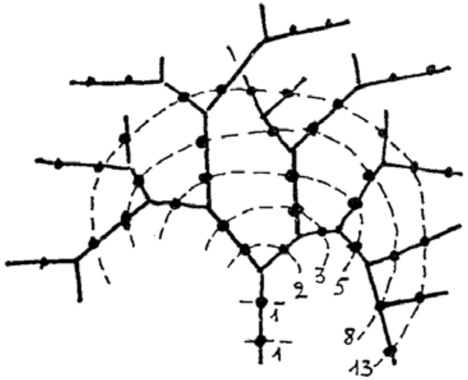
le tournesol
de 13/21 à 89/144 suivant la tai
la pomme de pin: 2/3, 3/5, 5/8 ou 8

Le record : un tournesol géant: $\frac{144}{233} = \frac{1}{1{,}618} = \boxed{\frac{1}{\varphi}}$

d'après Peter S. Stevens.

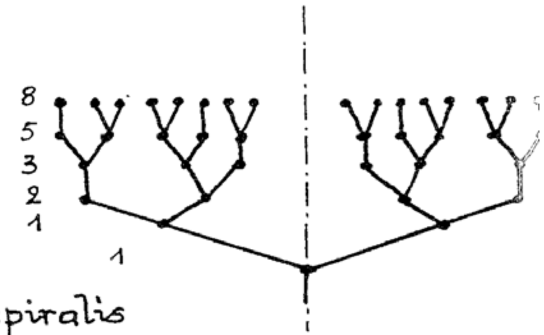
Le monde végétal.

Embranchements.

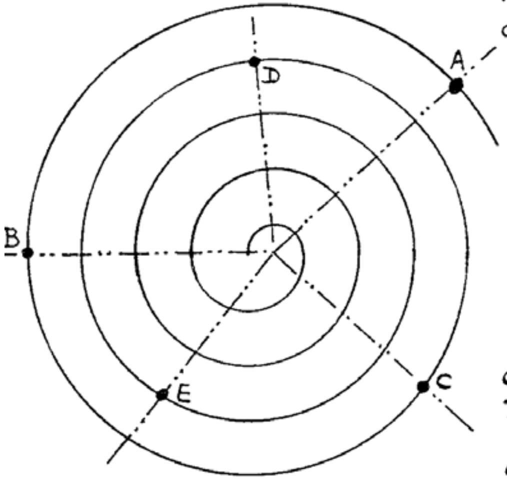


"Soit un **embranchement** dans lequel les sections longues mettent deux fois plus de temps à pousser que les sections courtes, les contours d'égale croissance relient les branches entre elles selon la progression :
1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - ... "
[Ce n'est qu'un type d'embranchement parmi d'autres.]

Fucus spiralis



... et l'on retrouve les nombres de Fibonacci ...



exemple : le céleri

Sur une spirale donnée, deux points d'insertion consécutifs des feuilles forment avec le centre un angle constant de 137°30'28" [137,5°]
Cette mesure correspond à

$$360 \times \frac{1}{\varphi^2} = \underline{137,5}$$

ou encore

$$360 \times \frac{34}{89} = \underline{137,5}$$

[13 - 21 - 34 - 55 - 89 ...] 4.04

La plante serait-elle une adoratrice de la suite de Fibonacci ? chercherait-elle à créer la beauté à l'aide du nombre d'or ?

d'après Peter S. Stevens.

" On ne peut expliquer par le hasard l'étrange prédominance des nombres de Fibonacci en botanique, leur apparition est beaucoup trop abondante pour être accidentelle ... le nombre φ est une constante de la nature, comme h la constante de Planck*, c la vitesse de la lumière π, e** ou k la constante de Boltzmann***. "

Roger V. Jean.

*h : constante universelle de la théorie des quanta ①.
**e : constante physique : charge de l'électron au repos.
***k : "l'entropie ② est proportionnelle au logarithme de la probabilité le facteur de proportionnalité étant k."

① quantum : valeur non continue, à laquelle correspond une manifestation d'énergie.

② entropie : dégradation de l'énergie qui se traduit par un état de désordre croissant de la matière. L'entropie négative ou néguentropie est une augmentation du potentiel énergétiq [Le Robert].