Isaac Newton et les dérivées

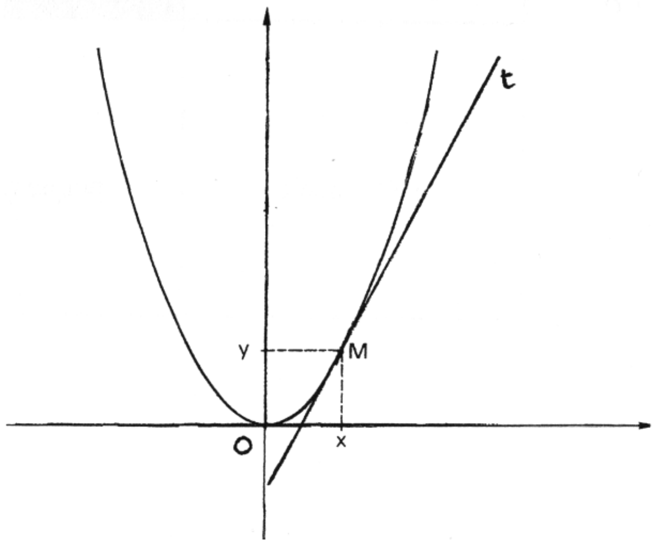
Dès la classe de 1ère, on apprend à calculer les dérivées des fonctions usuelles.
En 1687, dans son ouvrage « Principia mathematica », Isaac Newton expose sa théorie des « fluxions ». Il montre comment calculer la vitesse d'un corps en mouvement. On pourra dorénavant étudier et prévoir les mouvements des planètes et des comètes et plus tard ceux des vaisseaux spatiaux et des satellites artificiels.

Isaac Newton (1642-1727)

Né à Woolsthorpe.

En 1666, fuyant l'épidémie de peste qui sévissait à Londres, Isaac Newton se réfugia à la campagne, dans la propriété familiale de Woolsthorpe. C'est là que, voyant une pomme tomber de l'arbre, il eut, dit-on, l'intuition de la loi de la gravitation universelle.

Essayons d'expliquer ce que sont les « fluxions » de Newton qui permettent de calculer la vitesse d'un corps en mouvement.
Etudions ainsi la chute libre. Une pomme, lâchée du haut de la Tour de Pise, parcourt une trajectoire verticale. On relève la distance parcourue y au bout du temps x. On obtient la relation algébrique : $y = 4{,}9x^2$. La courbe correspondante est une parabole. On calcule différentes vitesses moyennes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, où Δx désigne un intervalle de temps et Δy la distance parcourue pendant cet intervalle de temps Δx. On constate que la vitesse n'est pas constante.
Quelle est donc la vitesse instantanée ?



La distance parcourue au bout du temps $x + \Delta x$ est :
$y + \Delta y$, autrement dit :

$y + \Delta y = 4{,}9(x + \Delta x)^2$,

$y + \Delta y = 4{,}9(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)$,

$y + \Delta y = 4{,}9x^2 + 9{,}8x\Delta x + 4{,}9(\Delta x)^2$.

Or : $y = 4{,}9x^2$, on en déduit que :

$\Delta y = 9{,}8x\Delta x + 4{,}9(\Delta x)^2$.

D'où : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 9{,}8x + 4{,}9\Delta x$.

La limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers 0 est la vitesse instantanée ou « fluxion », notée $\dot{y}$ par Newton.
Donc : $\dot{y} = 9{,}8x$.
Géométriquement, $\dot{y}$ est la pente de la tangente t au point M à la parabole. Ainsi la connaissance de la « fluxion » $\dot{y}$ permet d'étudier les variations de la « fluente » y.