

Kurt Gödel et l'hypothèse du continu

Dès la classe de 2nde, on utilise explicitement l'ensemble des nombres réels, rationnels et irrationnels, que l'on note \mathbf{R} . L'ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... , est noté \mathbf{N} . Jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle, l'existence des nombres irrationnels est admise sans qu'on ait jamais donné une définition précise.

En 1872, Richard Dedekind a été l'un des premiers à donner une définition de l'ensemble des nombres réels. Sur une droite donnée, à chaque réel correspond un point, et réciproquement.

Considérons maintenant les deux ensembles d'entiers suivants :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...

On remarque qu'à chaque élément du premier ensemble correspond un élément du second, et réciproquement. On dira que ces deux ensembles ont la même « puissance ». Intuitivement, les deux ensembles précédents ont le même « nombre » d'éléments et pourtant le second est une partie du premier. Ainsi, pour l'ensemble infini \mathbf{N} des entiers naturels, il existe donc des parties qui ont le même « nombre » d'éléments que le tout. Les ensembles qui auront la même puissance que \mathbf{N} seront appelés ensembles « dénombrables ».

Revenons à l'ensemble infini \mathbf{R} des réels, auquel on donne parfois le nom de « continu ».

En 1873, Georg Cantor a montré que \mathbf{R} n'était pas dénombrable et a émis la conjecture suivante, appelée « hypothèse du continu » : toute partie infinie de \mathbf{R} a soit la même puissance que \mathbf{N} , soit la même puissance que \mathbf{R} .

En 1938, Kurt Gödel démontre que l'on ne pourra jamais prouver que cette conjecture est fausse.



Kurt Gödel (1906-1978)

Né à Brünn (Brno).

Très curieux de tout dès son plus jeune âge, Gödel fut surnommé « Monsieur Pourquoi ».

En 1940, fuyant l'Allemagne nazie, il arriva au Etats-Unis et dut passer un examen de citoyenneté. En étudiant alors la Constitution américaine en détail, il y décela de nombreuses contradictions ou erreurs de logique. Ses amis Oskar Morgenstern et Albert Einstein lui conseillèrent de ne pas en faire état le jour de son examen, ce qu'il fit malgré tout. Gödel devint ainsi citoyen américain. [9]

En 1963, Paul Cohen démontre que l'on ne pourra jamais prouver que la conjecture énoncée par Cantor est vraie. En conclusion, l'hypothèse du continu ne peut être ni établie ni, comme l'avait déjà démontré Gödel, réfutée.