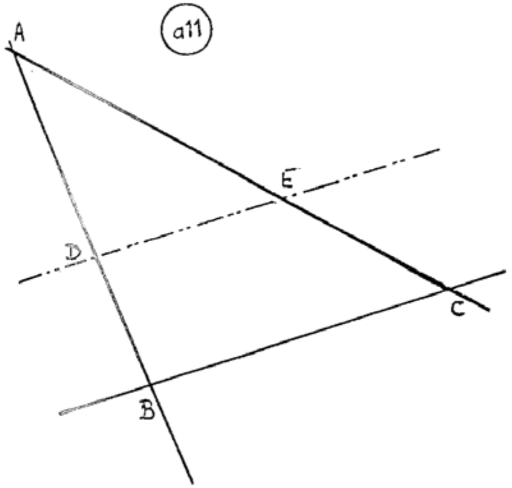
# Section d'or et mathématiques.

## Les proportions.

Chez les Grecs, proportion (analogia), signifie : équivalence des rapports.




Le théorème de Thalès, (mort en 548 av. J.C), permet d'écrire, si DE est parallèle à BC,

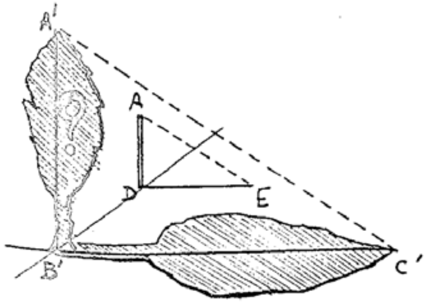
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Nous avons une proportion à quatre nombres.

Elle permit à Thalès d'évaluer la hauteur de la Grande Pyramide en comparant la longueur de son ombre et celle d'un bâton dont il connaissait la hauteur. Il mesura ainsi "l'inaccessible".



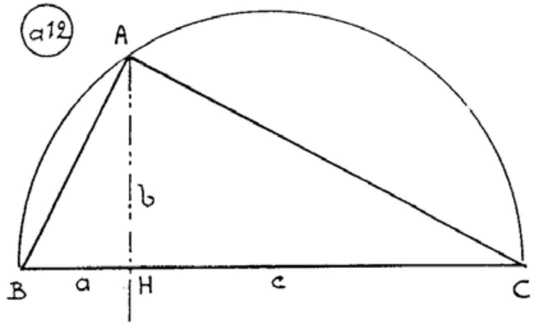

On utilise le même procédé pour mesurer la hauteur d'un arbre :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{DE}}$$

$$\text{d'où } \overline{A'B'} = \frac{\overline{AD} \times \overline{B'C'}}{\overline{DE}}$$

Si $AD = 1{,}20\,m$, $DE = 2\,m$, $B'C' = 18\,m$

la hauteur est $\frac{1{,}2 \times 18}{2} = 10{,}8\ m$




Une application du théorème de Pythagore (mort en 500 av. J.C), permet d'écrire, si AH est la hauteur du triangle ABC,

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{HC}$$

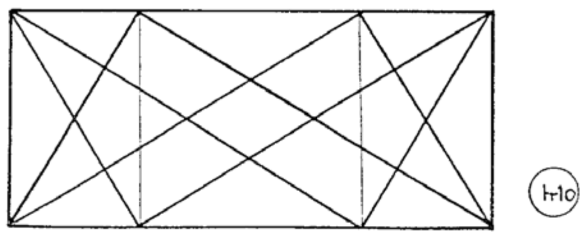
que l'on peut écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ ou } b^2 = a \times c$$

Nous avons une proportion à trois termes.

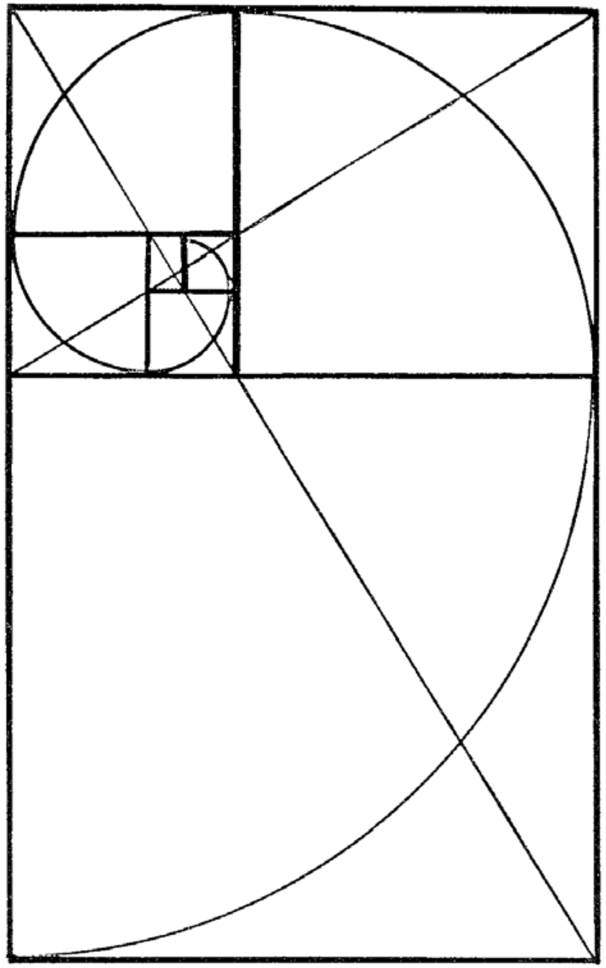
$b^2 = a \times c$, $b$ est la moyenne géométrique de $a$ et $c$ ou moyenne proportionnelle.

Remarque : Les propriétés du triangle rectangle étaient connues à Babylone à l'époque d'Abraham et d'Hammourabi. (1800 ans av. J.C).



# La divine proportion.

"Le Grand Ordonnateur du "Timée" [de Platon] a obtenu la consonance, la "Symphonia", qui tend et fait vibrer, arc invisible, son œuvre de pierre ou de marbre"
Matila C. Ghyka.



$$\boxed{\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi}$$

Ce rapport peut s'écrire:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\dots}}}$$

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}$$

ou

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\dots}}}}$$

Cette proportion est à la fois harmonique et dynamique.

Elle fut qualifiée de divine par le moine Luca Pacioli di Borgo dont le livre "De divine proportione", publié en 1504, fut illustré par Léonard de Vinci.

Elle engendre une progression arithmétique et géométrique:

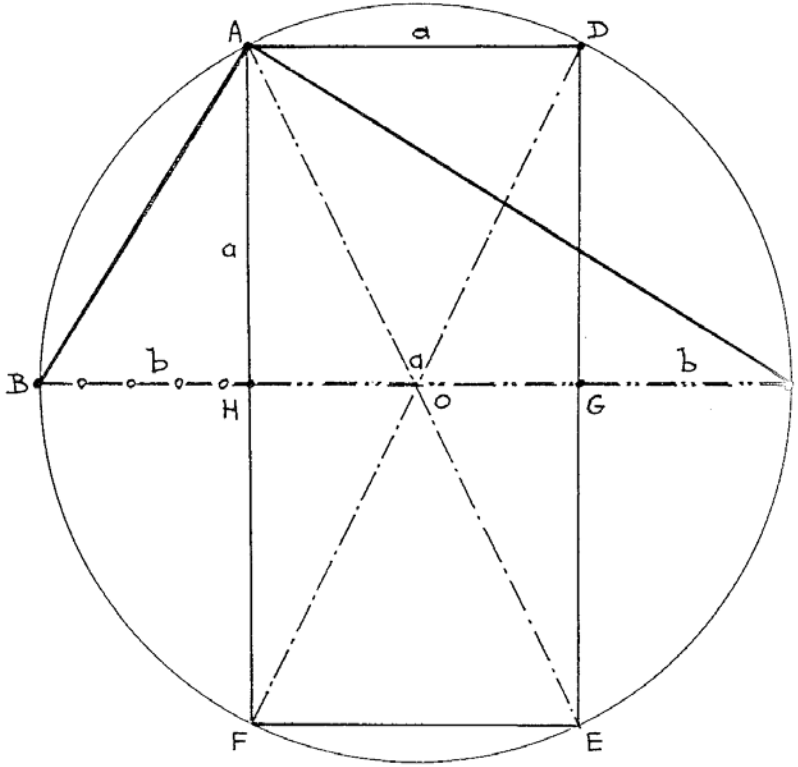
$$\frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi} - 1 - \varphi - \varphi^2$$

en rapport avec la suite de Fibonacci ...

# La proportion "économique".

"Le fond, l'essence de l'âme du monde est quelque-chose qui constitue une moyenne proportionnelle entre Dieu et l'univers matériel. La moyenne proportionnelle est l'idée même de médiation."

Simone Weil.




Construction :
1. Tracer un rectangle ADEF m AD = AH = HF.
2. puis les deux diagonales qui se coupent en O et le cercle de centre O et de rayon OA.
3. Tracer AB et AC : ABC, triangle rectangle.

On peut écrire $AH^2 = BH \times (HG + GC)$ $\quad a^2 = b \times (a+b)$ $\quad$ [1]

ou encore $\boxed{\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}}$

Cette proportion est la plus "économique" puisqu'elle ne comprend que deux termes

Posons $\dfrac{a}{b} = \varphi$ , on a, $b = \dfrac{a}{\varphi}$

L'équation [1] peut s'écrire :

$a^2 = \dfrac{a}{\varphi} \times a + \dfrac{a}{\varphi}$ $\quad$ ou encore : $a^2 = \dfrac{a}{\varphi} \times \dfrac{a\varphi + a}{\varphi}$

soit : $a^2 = \dfrac{a(a\varphi + a)}{\varphi^2} = \dfrac{a^2\varphi + a^2}{\varphi^2}$

d'où : $\varphi^2 = \dfrac{a^2\varphi + a^2}{a^2} = \dfrac{a^2(\varphi+1)}{a^2} = \varphi + 1$

ce qui donne l'équation du second degré :

$\boxed{\varphi^2 - \varphi - 1 = 0}$

qui admet deux racines : $\varphi = \boxed{\dfrac{+1+\sqrt{5}}{2}}$

et $\varphi' = \dfrac{+1-\sqrt{5}}{2}$

Calcul : si $a = 1$ $\quad \overline{AF} = 2$ $\quad$ et $AE = \sqrt{5} = BC$

$BH + HG + GC = BC$ $\quad BH = GC = b$ $\quad HG = a$

$b + a + b = \sqrt{5}$ $\quad$ ou $\quad a + 2b = \sqrt{5}$

$2b = \sqrt{5} - 1$ et $b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$a + b = 1 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{2+\sqrt{5}-1}{2}$

$$\boxed{a + b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi = 1,618\ldots}$$

et $b = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\ldots = \dfrac{1}{\varphi}$

# Harmonie et section d'or.

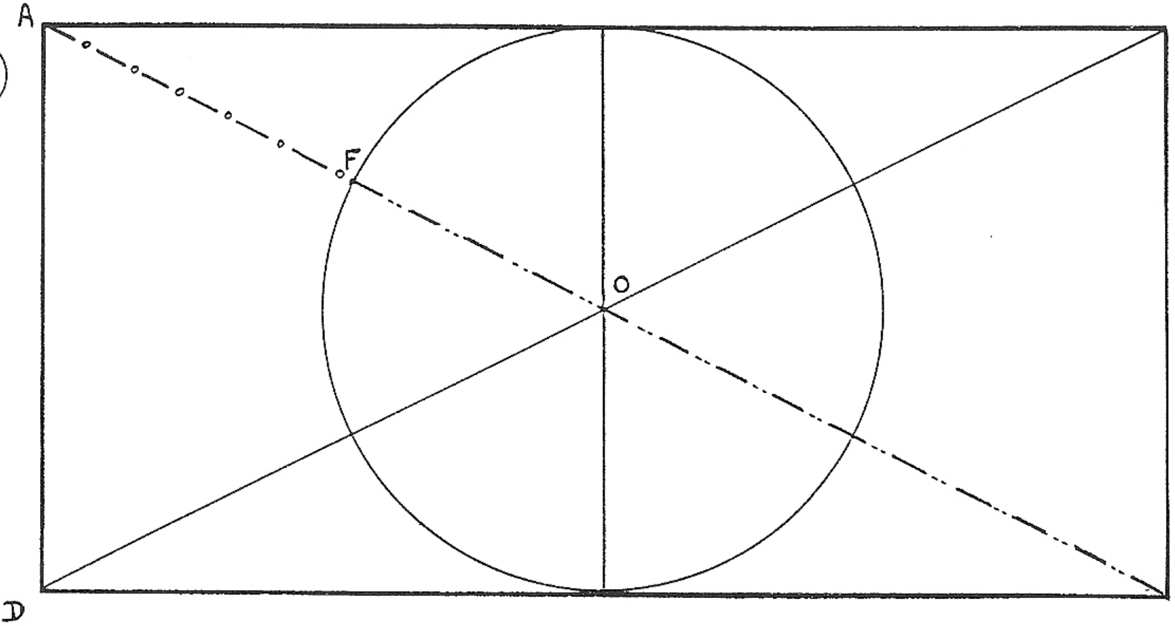
"Les Anciens vouaient un véritable culte au Nombre et à la forme ... Le Nombre d'or, une constante de la Nature, a exercé sur eux une fascination. C'est le nombre de Phidias, généralement noté $\varphi$"

R. Y. Jean.
"Croissance végétale et morphogénèse"

"Trois tables, dit la légende, portèrent le Graal: l'une est ronde, l'autre carrée et la troisième rectangulaire ; elles ont le même périmètre et leur nombre est 21."
"Or, la table rectangulaire, c'est ... la table mystique ... Il faut, en effet, lire, non pas 21 mais 2 et 1."

Louis Charpentier (op. cit.)

tr1




Le rectangle 1×2 met en évidence le rapport $\varphi$

Si $\overline{AD} = 1$ $\quad \overline{AB} = 2$ , $\overline{AC} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 2{,}236\ldots$ (a12)

$\overline{OC} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \overline{OF} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \overline{FC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots = \varphi$

$\overline{AF} = 2{,}236 - 1{,}618 = 0{,}618 = \dfrac{1}{\varphi}$

$\boxed{\text{Le rapport } \varphi}$ est appelé : Section d'or – Section dorée – Nombre d'or – Divine proportion –

Il engendre une suite : $\underset{\frac{1}{\varphi^2}}{0{,}382} - \underset{\frac{1}{\varphi}}{0{,}618} - 1 - \underset{\varphi}{1{,}618} - \underset{\varphi^2}{2{,}618}$

dont chaque terme est égal – à la somme des deux qui précèdent, [suite récurrente]
– au produit de celui qui précède par $\varphi$. [progression géométrique]