



Library of Congress

COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

~~~~~  
I<sup>re</sup> PARTIE. *ANALYSE ALGÈBRIQUE.*



DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,  
rue Serpente, n.º 7.

~~~~~  
1821.

Augustin-Louis CAUCHY

Augustin-Louis Cauchy est né à Paris le 21 Août 1789. Brillant élève, il entre à l'Ecole polytechnique à seize ans et intègre le prestigieux corps des Ponts et Chaussées. Tout en participant à la construction du port militaire de Cherbourg comme aspirant ingénieur, il commence des recherches mathématiques sur les polyèdres et les nombres polygonaux, démontrant dans un brillant mémoire une conjecture de Fermat :

Tout entier naturel non nul est somme d'au plus trois nombres "triangulaires", d'au plus quatre nombres "carrés", d'au plus cinq nombres "pentagonaux", etc..

En 1815, il est nommé professeur à l'Ecole polytechnique et accède en 1816 à l'Académie des sciences . Très novateur par son esprit de rigueur, accordant beaucoup d'importance aux définitions, le cours qu'il professe à l'X est parfois controversé par ses élèves et ses collègues. Il n'en demeure pas moins qu'il deviendra une référence de l'analyse au XIX-ème siècle. Des définitions des notions de limites, de continuité, de convergence de suites et de séries y sont données. On y trouve la célèbre notion de *suites de Cauchy* :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est dite de Cauchy si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall p \geq n_0 \forall q \geq n_0) (|u_p - u_q| < \varepsilon)$$

ainsi que le théorème essentiel associé :

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Approfondissant les problèmes de convergence, il précise *critère de Cauchy* pour les séries à termes réels ou complexes :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes, et soit :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 0} |u_n|^{\frac{1}{n}}, \quad (0 \leq L \leq +\infty)$$

- Si $L < 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.
- Si $L > 1$ la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Dans les années 1820, il explore entre autres les fonctions d'une variable complexe et établit la *formule intégrale* dite de *Cauchy* :

Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω . Pour tout $z \in \Omega$, tel que $z \notin \gamma$, on a :

$$f(z) \cdot \text{Ind}(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

où $\text{Ind}(z, \gamma)$ est l'indice du chemin γ par rapport à z .

Formule qui débouchera en 1844 sur la célèbre *formule des résidus*.

Ses travaux sur les équations différentielles aboutissent au théorème d'existence et d'unicité dit de *Cauchy-Lipschitz*.

A la suite de la Révolution de Juillet 1830, Cauchy prend la route de l'exil pour la Suisse puis l'Italie où il résidera jusqu'en 1833, occupant une chaire de physique mathématique à l'université de Turin. Ses convictions légitimistes le conduiront ensuite à Prague où il s'occupera de l'éducation du comte de Chambord, petit fils de Charles X, prétendant au trône de France exilé dans cette ville. De retour en France en 1838, il est élu au Bureau des longitudes et reprend ses cours à l'Ecole polytechnique, charge qu'il occupera jusqu'à sa mort le 23 mai 1857.

En 1846, il reprend certaines de ses recherches sur les groupes algébriques et démontre le *théorème de Cauchy des groupes finis* :

Si un nombre premier p divise l'ordre d'un groupe fini G , alors G possède au moins un élément d'ordre p

En ces temps politiquement troublés, Cauchy a été exposé à de multiples critiques. On lui a surtout reproché d'avoir sous-estimé les travaux essentiels du jeune et infortuné Évariste Galois dont il aurait laissé dormir dans un tiroir le mémoire fondamental sur les racines des équations polynomiales. L'œuvre de Cauchy est tout à fait considérable, en particulier en analyse où il a cherché à fonder ses résultats sur des concepts précis et rigoureux, contribuant largement au développement des mathématiques de son siècle.

Un aperçu des travaux de CAUCHY

Les travaux de Cauchy en analyse complexe débouchent sur l'importante formule des résidus :

Soit K un compact du plan limité par un nombre fini d'arcs de classe C^1 .

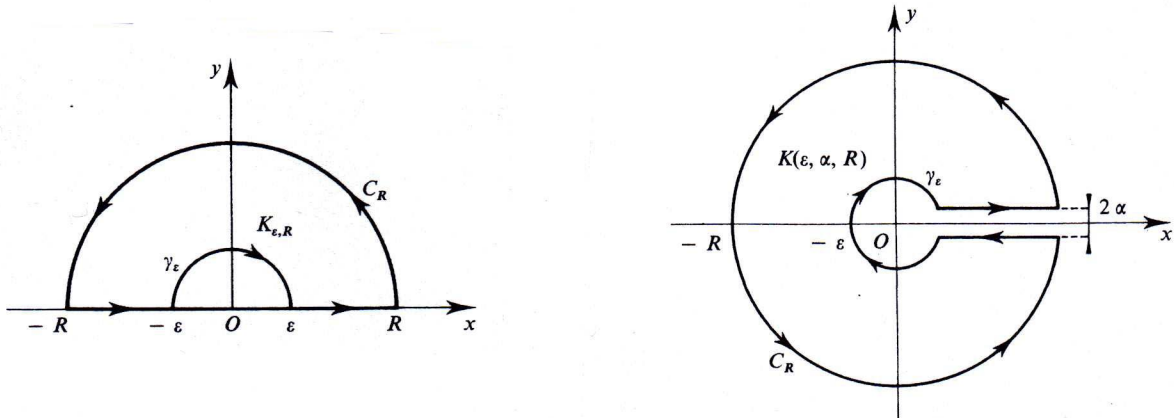
Soient n complexes z_1, z_2, \dots, z_n intérieurs à K , et f une fonction holomorphe sur $K \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, admettant z_1, \dots, z_n pour pôles. On a :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

où $\text{Res}(f, z_k)$ désigne le résidu de la fonction f en z_k .

Cette formule, grâce au choix de " chemins " bien choisis du plan, permet le calcul d'intégrales particulières. Par exemple :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad \text{pour } 0 < a < 1$$



L'analyse complexe fournit encore à Cauchy l'occasion d'établir un important résultat comme ce théorème démontré en 1844 et attribué à tort à Liouville (1855)

Toute fonction holomorphe sur \mathbb{C} et bornée est constante.

Grâce à lui on démontre en quelques lignes le célèbre théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme à coefficients complexes, non constant, admet au moins une racine dans \mathbb{C} .



¹Alexandre DEDE-sdm-nov-2006-Cauchy.TEX