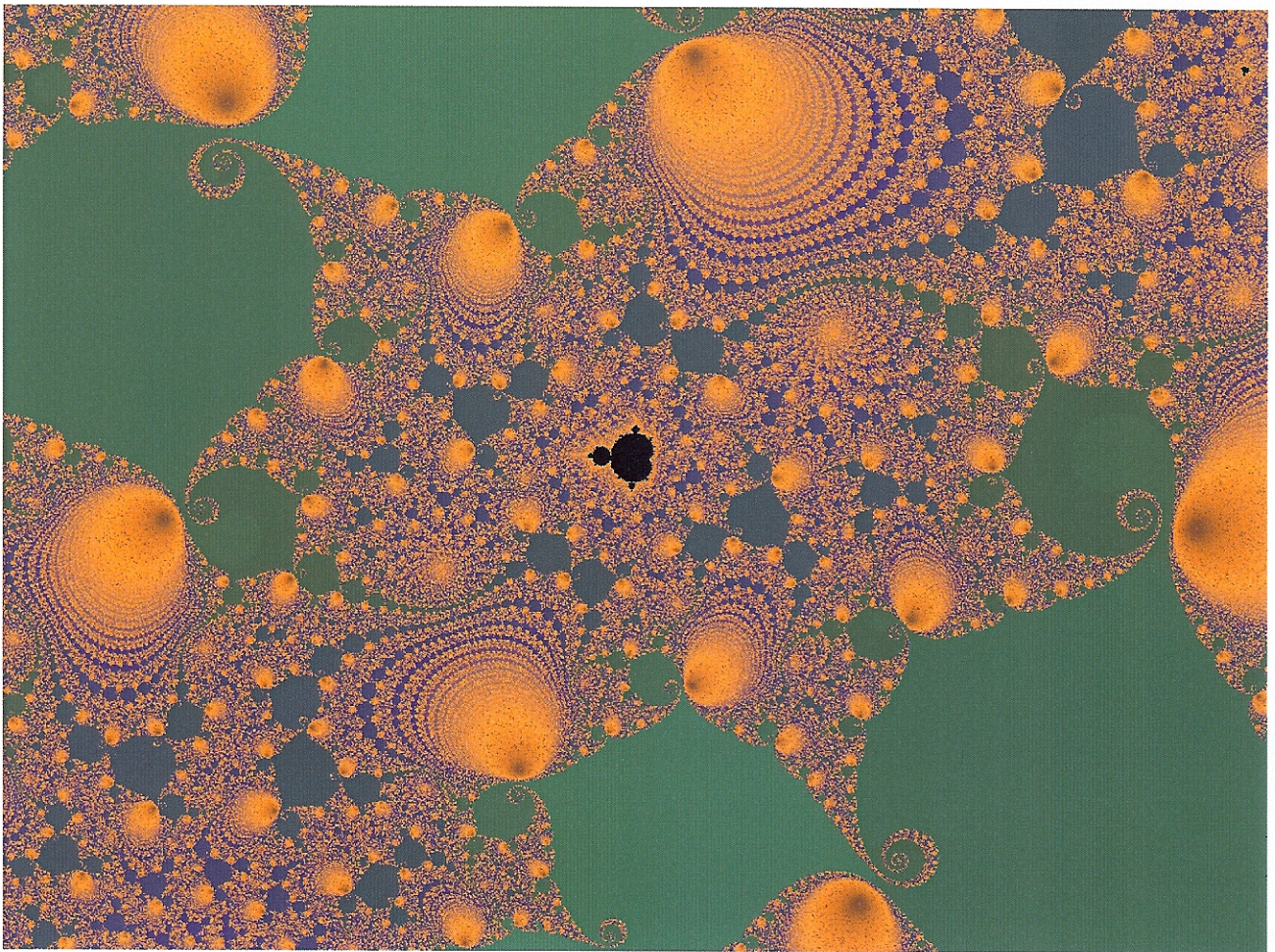


UNE FIGURE FRACTALE AU LYCÉE

Nul n'est insensible à la beauté étrange de ces figures colorées, à leurs arabesques, à leurs paradoxales structures qui se déploient selon des règles mystérieuses.

Quels sont donc les procédés de constructions de ces chimères graphiques ?

Il faut les chercher dans les nombres complexes, plus précisément dans les suites récurrentes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes du type $z_{n+1} = P(z_n)$, où P est un polynôme. Au début du XX^{ième} siècle, le mathématicien Gaston Julia fut un des premiers à s'intéresser à de telles suites, il laissera d'ailleurs son nom à quelques ensembles spectaculaires, construits à partir de la suite (z_n) définie par la donnée de z_0 et de la relation $z_{n+1} = z_n^2 + a$. Pour certains choix du point M_0 d'affixe z_0 , la suite (z_n) reste bornée, formant l'ensemble noir de la figure ci-dessous.



Dans les années soixante, le mathématicien Benoît Mandelbrot, s'inspirera des travaux de G. Julia et développera considérablement la théorie des fractals aidé en cela par l'informatique et ses prodigieuses ressources de calcul.

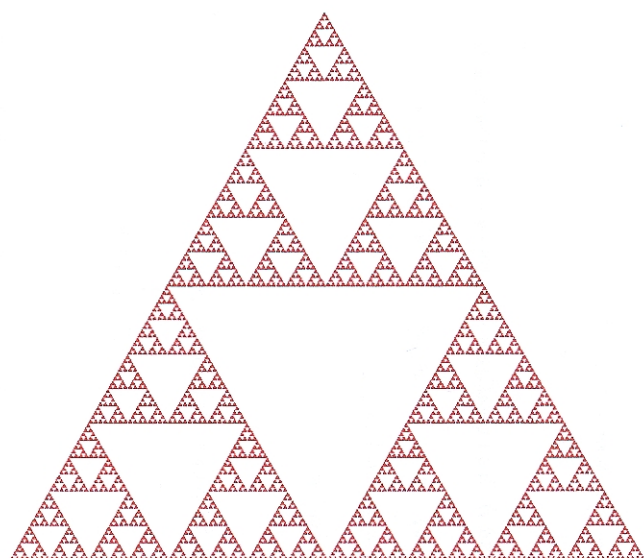
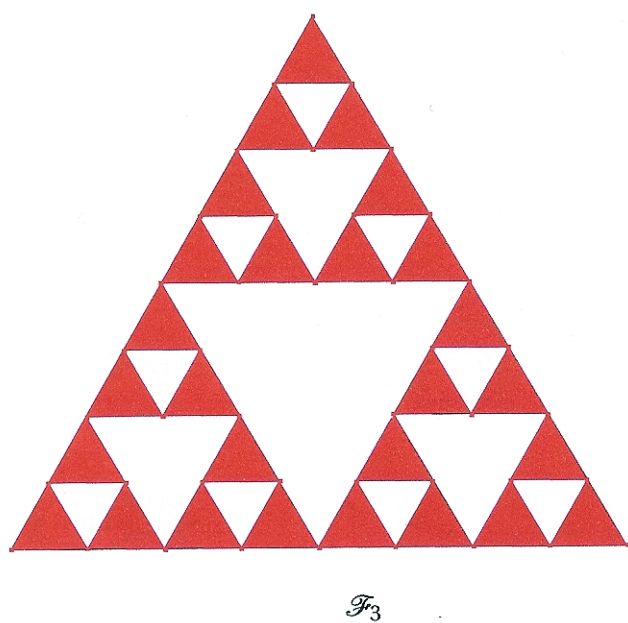
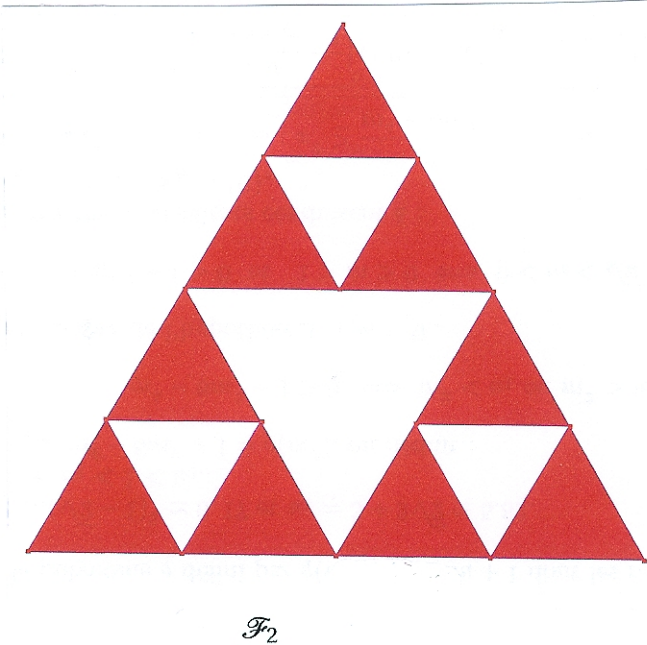
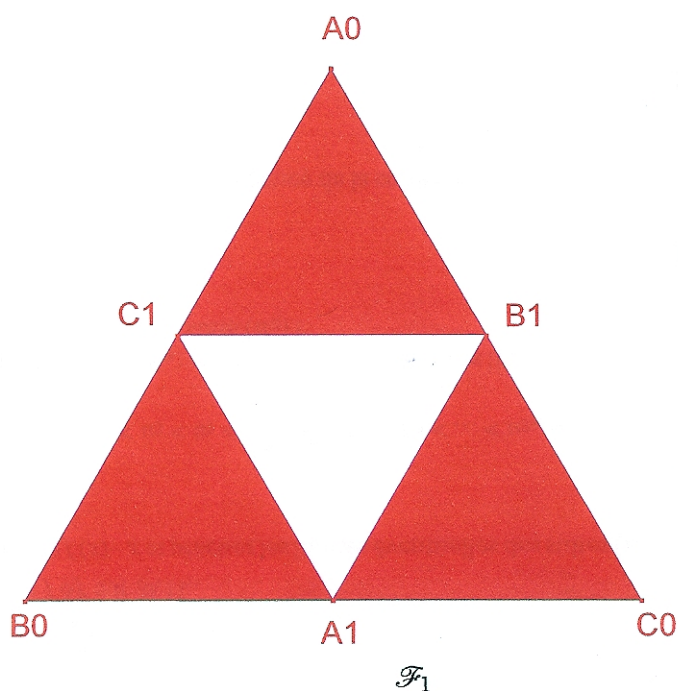
Il reste délicat de fournir une définition des fractals, on peut se contenter d'attribuer cette appellation à des figures présentant une forme "d' auto-similarité".

Le cas du [triangle de Sierpinski](#) fournit un exemple d'une telle figure.



LE TRIANGLE DE SIERPINSKI

On considère une première figure \mathcal{F}_0 , triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ de longueur de côté 1, d'aire $\frac{\sqrt{3}}{4}$, peint en rouge; on désigne respectivement par A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés $[B_0C_0]$, $[A_0C_0]$, $[A_0B_0]$ et on peint en blanc l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$. La figure \mathcal{F}_1 est la figure rouge ainsi obtenue. On effectue ensuite la même opération sur chacun des triangles encore rouges de \mathcal{F}_1 , $A_0C_1B_1$, $C_1B_0A_1$, $B_1A_1C_0$ pour obtenir la figure \mathcal{F}_2 et ainsi de suite, ce qui conduit aux figures \mathcal{F}_3 ..., \mathcal{F}_n ,... dont les premières sont représentées ci-dessous :



on n'est plus très loin de \mathcal{F}_∞ ...

Pour tout entier naturel n , soit t_n le nombre de triangles équilatéraux encore rouges avant la $(n+1)$ -ième opération, c_n le nombre total de leurs côtés, s_n le nombre total de leurs sommets et a_n la longueur d'un côté quelconque d'un triangle rouge de \mathcal{F}_n .

On a donc : $t_0 = 1$, $c_0 = 3$, $s_0 = 3$, $a_0 = 1$, $t_1 = 3$, $c_1 = 9$, $s_1 = 6$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

1. *Calcul de a_n :*

Le principe récurrent de construction conduit à la relation : $\forall n, a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n$.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on déduit :

$$\text{pour tout entier } n : a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. *Calcul de s_n :*

A partir de chaque triangle équilatéral rouge de la figure \mathcal{F}_n , on construit trois triangles équilatéraux rouges de \mathcal{F}_{n+1} présentant 9 côtés donc : $t_{n+1} = 3t_n$. La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 de premier terme $t_0 = 1$ donc $t_n = 3^n$. Comme $c_n = 3t_n$, on déduit : $c_n = 3^{n+1}$.

De la figure \mathcal{F}_n à la figure \mathcal{F}_{n+1} , chaque côté d'un triangle rouge fournit un nouveau sommet de triangle, on a donc $s_{n+1} = s_n + c_n$. Ce qui conduit à la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 + c_0 \\ s_2 &= s_1 + c_1 \\ &\vdots \\ s_n &= s_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}$$

D'où l'on tire par addition : $s_n = s_0 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i = 3 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^{i+1} = \frac{3}{2}(1+3^n)$ pour tout entier n .

3. *La relation d'Euler-Poincaré :*

Pour tout entier naturel n , on désigne par b_n le nombre de triangles équilatéraux déjà peints en blanc avant la $(n+1)$ -ième opération, (de sorte que $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$).

a) Chaque triangle rouge de \mathcal{F}_n génère un triangle blanc dans \mathcal{F}_{n+1} venant s'ajouter aux triangles blancs déjà construits, de sorte que : $b_{n+1} - b_n = t_n$. On obtient alors la suite d'égalités

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 + t_0 \\ b_2 &= b_1 + t_1 \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1} + t_{n-1} \end{aligned}$$

qui par addition donne : $b_n = \sum_{i=0}^{n-1} t_i = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

b) Cette dernière expression calculée, on vérifie la *relation d'Euler-Poincaré* :

$$t_n + b_n - c_n + s_n = 1,$$

identité analogue à celle d'Euler pour les polyèdres $f - a + s = 2$ où f est le nombre de faces, a le nombre d'arêtes et s le nombre de sommets du polyèdre.

4. Pour tout entier naturel n , on note p_n la somme des périmètres des triangles encore rouges avant la $(n+1)$ -ième opération et S_n la surface encore peinte en rouge.

a) Calcul de p_n , périmètre de \mathcal{F}_n .

Comme la longueur d'un côté d'un triangle rouge de \mathcal{F}_n est $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et qu'il y a $t_n = 3^n$ tels triangles la somme des périmètres de tous les triangles de \mathcal{F}_n est $p_n = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

b) Calcul de S_n , l'aire de \mathcal{F}_n .

On sait que l'aire d'un triangle équilatéral de longueur de côté R est $\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$. L'aire S_n de \mathcal{F}_n est donc :

$$S_n = \text{somme des aires des triangles rouges} = t_n \cdot \frac{\sqrt{3}a_n^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

c) La figure limite \mathcal{F}_∞ .

Le procédé récurrent de construction des \mathcal{F}_n conduit à une figure limite qu'il est impossible de représenter. On conçoit que son aire S_∞ soit la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ des aires des \mathcal{F}_n ,

soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, alors que son périmètre est infini puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Cette figure insolite \mathcal{F}_∞ , d'aire nulle et de périmètre infini, est-elle une "ligne" ou un peu plus ?

d) Une nouvelle dimension : la dimension fractale

Considérons un carré \mathcal{C}_0 de côté 1 en divisant ce carré en carrés de même côté $\frac{1}{2^n}$, on obtient 2^{2n} carrés. Le rapport d'homothétie H qui permet de passer de la longueur du côté du carré initial \mathcal{C}_0 à celle d'un côté d'un des carrés de \mathcal{C}_n est $\frac{1}{2^n}$, alors que le facteur de similarité P qui donne le nombre de nouveaux carrés construits est $P = 2^{2n}$. De sorte que

$$P = \left(\frac{1}{H}\right)^2.$$

Un raisonnement analogue pour un cube conduit à $P = \left(\frac{1}{H}\right)^3$. Les exposants entiers 2 et 3 présents dans ces deux formules sont respectivement les dimensions du carré et du cube.

Des considérations analogues sur les figures \mathcal{F}_n montrent que le rapport d'homothétie H est $\frac{1}{2^n} = a_n$ et le facteur de similarité $P = t_n$.

Guidé par ce qui précède, on cherche un réel D tel que

$$t_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^D \quad (*)$$

On a : $(*) \iff \ln t_n = D \cdot \ln \left(\frac{1}{a_n}\right) \iff \ln 3^n = D \ln 2^n$. D'où on tire :

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1,584962.$$

Le réel $D = \frac{\ln 3}{\ln 2}$, non entier est appelé *dimension fractale* de la figure \mathcal{F}_∞ . Compris strictement entre 1 et 2, cette dimension fait de \mathcal{F}_∞ une figure qui se situe quelque part entre une "courbe" et une "surface" !

La figure rouge limite \mathcal{F}_∞ est connue sous le nom de Triangle ou Joint de Culasse de Sierpinski.

